Nome e Cognome: ....

Durata: 2 ore. Non è possibile usare appunti o aiuti elettronici. Scrivere le soluzioni in questi fogli.

Esercizio 1 Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $V = M_{2,2}(\mathbb{R})$

$$W_1 = \{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in V : a_{11} - a_{22} = 0\} \qquad W_2 = \{A \in V : A^t = -A\} \qquad W_3 = \{A \in V : A = A^t - \mathrm{Id}\}\,.$$

1. Quali tra W_3, W_2 e W_1 sono sottospazi vettoriali di V? Motivare la risposta.
2. Scegliere W_i e W_j che siano sottospazi, e calcolare una base di $W_i \cap W_j$ e di $W_i + W_j$.

Esercizio 2 In $\mathbb{R}^3$ siano $s = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\quad r_1 : \begin{cases} -x - y - z = 2 \\ \phantom{-x -{}} y + 3z = 0 \end{cases}$, $\quad r_2 : \begin{cases} 3x - 2y \phantom{{}+z} = b \\ - 2y + z = 0 \end{cases}$.

1. Dire se r_1 e r_2 sono parallele coincidenti, parallele distinte, incidenti o sghembe al variare del parametro b.
2. Dati $P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, individuare un punto P appartenente ad s tale che l'angolo tra PP_1 e PP_2 sia di 60 gradi. Un tale punto P è unico?

Esercizio 3 Sia $V = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : \deg(p) \leq 3\}$ e consideriamo l'applicazione lineare

$$L\colon V \longrightarrow \mathbb{R}^3\,, \quad L(p(x)) = (-p(0), p'(2) + p(0), p(0) + 4p'(2)).$$

1. Che dimensione hanno il kernel e l'immagine di f?
2. Sia $W = \{p(x) \in V : p(1) = p(0)\}$. W é un sottospazio di V? In caso positivo dare dei generatori di $f(W)$.

Esercizio 4 In $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare standard $\langle\, ,\rangle$, siano $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e sia

$$G\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3\,, \qquad G(v) = \langle v, w_1\rangle \cdot w_2 - \langle v, w_2\rangle \cdot w_1$$

1. La funzione G é diagonalizzabile? In caso positivo dare una base di autovettori
2. La funzione $G^2 = G \circ G$ e' diagonalizzabile?